COURS COMPLET SUR LES CONIQUES

par Axel Chambily-Casadesus

Les coniques sont les courbes planes du second degré, obtenues par la section d'un cône de révolution par un plan. (voir les figures sur la fiche "coniques" et éventuellement le T.P. "cône et coniques" en annexe)

Les coniques non dégénérées (c'est à dire non réduites à des droites) sont dites coniques propres. Il s'agit de la parabole, de l'ellipse et de l'hyperbole.

PARABOLE (conique propre sans centre)

* Définition monofocale (ou "par foyer et directrice")

Soient un point D et une droite D ne passant pas par F. On appelle parabole de foyer F et de directrice D l'ensemble P des points du plan équidistants de F et D.

Soit H le projeté orthogonal d'un point M sur D. On retiendra :

$$\boxed{M \in P \Leftrightarrow MF=MH \Leftrightarrow e=\frac{MF}{MH}=1}$$

Le nombre e, que nous allons souvent retrouver, s'appelle l'excentricité de la conique. Une parabole est une conique d'excentricité 1.

Le nombre p=d(F,D) s'appelle le paramètre de P.

La droite D' passant par F et orthogonale à D s'appelle l'axe de P.

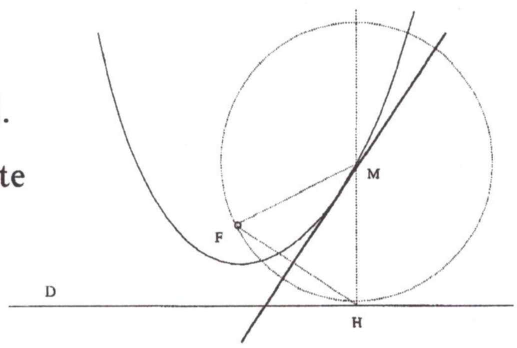
Le point S=mil(F,O) où O est le point d'intersection de D et D' est le sommet de P.

Faire un schéma mettant en évidence les divers éléments caractéristiques de P.

Question : que définit-on si F est un point de D ?

* Construction point par point

Etant donné un point H sur D, on obtient un point M de P comme intersection de la perpendiculaire à D en H et de la médiatrice de [FH]. Il sera montré plus loin que cette médiatrice n'est autre que la tangente à P en M.

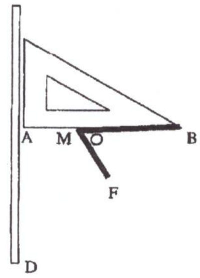


On déduit de la construction une autre définition de la parabole :

La parabole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à D.

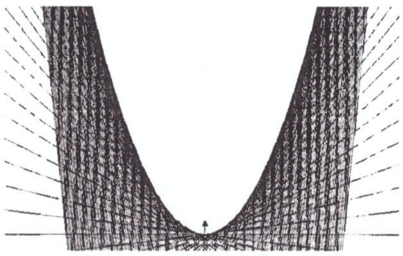
* <u>Construction "mécanique"</u>

On dispose d'une équerre pouvant librement glisser sur une règle qui matérialise D. Un clou matérialise le point F. Une ficelle de longueur fixe AB est attachée à la pointe B de l'équerre et au point F. Un crayon tendant la ficelle en M dessine la parabole lorsque l'on fait glisser l'équerre.



* <u>Amusant petit pliage</u>

Prendre une feuille de papier A4 orientée paysage. D est matérialisée par le bord inférieur de la feuille. A 3cm de ce bord, marquer F au milieu de la feuille. Replier le coin inférieur droit de manière à ce que le bord de la partie repliée passe par F. Renouveler ce pli autant de fois qu'on le désire et recommencer avec le coin inférieur gauche. Les plis dessinent une parabole. (en fait, on obtient l'enveloppe tangentielle de la parabole, ce qui sera justifié plus loin. Voir la figure ci-contre.)



remarque : Le rapport MF/MH étant conservé par toute similitude, toutes les paraboles sont semblables.

* <u>Equation réduite de la parabole</u>
(équation de la parabole rapportée à son sommet et à son axe)

On munit le plan du repère orthonormé $(S;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\dfrac{1}{\|\overrightarrow{SF}\|}\overrightarrow{SF}$

En traduisant analytiquement la relation $MF^2=MH^2$ pour un point M(x,y) on arrive rapidement à :

$$\boxed{y^2=2px}$$

On en conclue que les courbes représentatives des fonctions trinômes du second degré connues depuis la classe de seconde sont bien des paraboles au sens de la définition donnée en terminale.

exercice : représenter la parabole d'équation $y=x^2$ et retrouver tous ses éléments caractéristiques. (par exemple, son paramètre est 1/2)

* <u>Représentation paramétrique de la parabole</u>

On peut prendre (par exemple !) :

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p} \\ y=t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}}$$

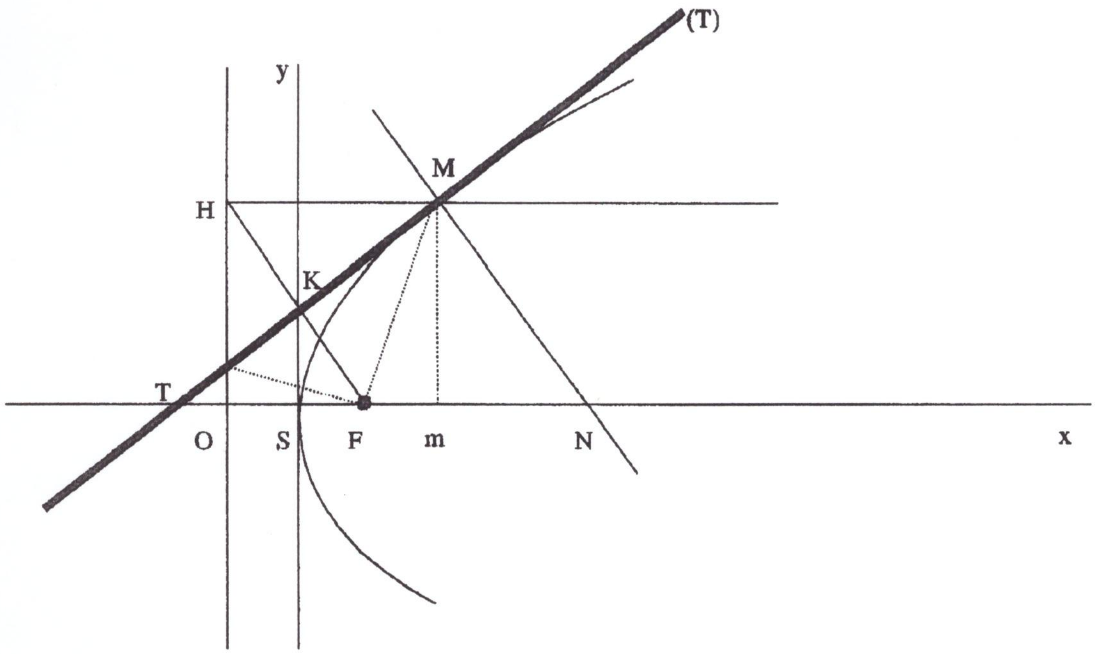
* Tangentes à la parabole

Equation de la tangente en un point $M(x_0,y_0)$

On a : $\begin{cases} x'(t_0)=\dfrac{t_0}{p}=\dfrac{y_0}{p} \\ y'(t_0)=1 \end{cases}$ donc : (T): $\begin{vmatrix} x-x_0 & \dfrac{y_0}{p} \\ y-y_0 & 1 \end{vmatrix}=0$

En utilisant le fait que $y_0^2=2px_0$, on obtient $\boxed{yy_0=p(x+x_0)}$

Cette relation est facile à mémoriser en raison de la règle dite du *dédoublement des termes*. On remarque en effet que de l'équation de la parabole $y^2=2px$ on passe à celle de la tangente en remplaçant y^2 par yy_0 et $2x$ par $(x+x_0)$. On va voir plus loin que la règle du dédoublement des termes est valable pour toutes les coniques.



La droite (MT) est la tangente en M à P.
La droite (MN) est la normale en M à P.
Le segment [mT] s'appelle la sous-tangente.
Le segment [mN] s'appelle la sous-normale.

Proposition 1

Le sommet est le milieu de la sous-tangente.

Ce résultat se montre analytiquement sans difficulté.

Théorème

La tangente en M est bissectrice de l'angle FMH.

(T) admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} y_0/p \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OH}$ donc $\overrightarrow{FH}\begin{pmatrix} -p \\ y_0 \end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{FH}.\vec{u}=0$.
Comme MF=MH, (T) est la médiatrice de [FH] et par conséquent bissectrice de FMH puisque le triangle FMH est isocèle.

Remarque : ce résultat explique "l'amusant petit pliage". Il justifie par ailleurs l'intérêt des miroirs et antennes paraboliques ou du four solaire : un rayon incident parallèle à l'axe de P se réfléchit en M avec, d'après la loi de la réflexion, un angle égal à l'angle d'incidence. Ainsi, d'après le théorème, le rayon parvient en F. Tous les rayons incidents convergent donc au foyer, ce qui explique la dénomination de celui-ci : il y fait chaud !

Proposition 2

La longueur de la sous-normale est égale au paramètre.

En effet, il suffit de remarquer que les triangles OHF et MmN sont isométriques.

Théorème

Le point K, projeté orthogonal de F sur (T), appartient à la tangente au sommet.

dém. L'homothétie de centre F et de rapport 1/2 transforme H en K et O en S, d'où le résultat.

Théorème

La portion de tangente comprise entre la parabole et sa directrice est vue du foyer sous un angle droit.

dém. Il suffit de remarquer que les triangles MFI, où I est le point d'intersection de (T) et de la directrice, et MHI sont symétriques par rapport à (T).

exercice : montrer que la directrice est le lieu orthoptique de la parabole. (c'est à dire l'ensemble des points d'où l'on peut mener des tangentes à P orthogonales entre elles)

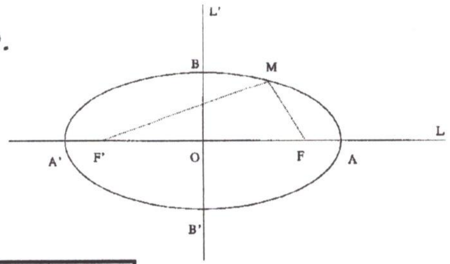
ELLIPSE

* Définition bifocale (conique propre à centre)

Soient F et F' deux points tels que FF'=2c et a un réel tel que a>c. On appelle ellipse de foyers F et F' l'ensemble des points du plan tels que :

$$\boxed{MF+MF'=2a}$$

remarque : si c=0, l'ellipse est un cercle.



O est le centre de l'ellipse, (FF') l'axe focal, FF'=2c la distance focale, L', médiatrice de [FF'] l'axe non focal, A,A',B,B' les sommets, (AA') le grand axe (AA'=2a), (BB') le petir axe .

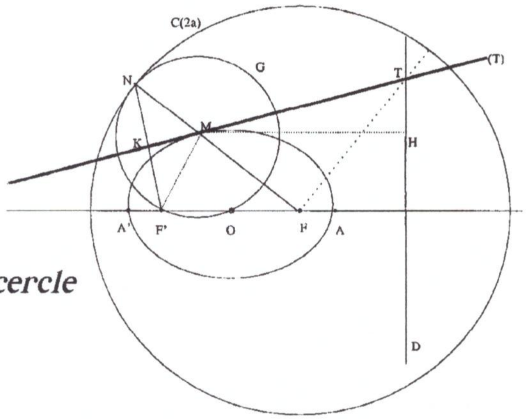
On pose OB=b. Ainsi BB'=2b. On retiendra $\boxed{a^2=c^2+b^2}$
$\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ s'appellent les rayons-vecteurs.

∗ Construction point par point

Théorème

L'ellipse de foyers F et F' (FF'=2c), de grand axe 2a (a>c) est le lieu des centres des cercles passant par F' et tangents intérieurement à C, cercle de centre F et de rayon 2a. *(C s'appelle le cercle directeur de l'ellipse relatif à F)*

dém. Soit M un point de l'ellipse. MF+MF'=2a. Soit G le cercle de centre M et de rayon MF'. Soit N le point de G situé sur (MF) tel que M soit entre F et N. FN=FM+MN=FM+F'M=2a. G est donc tangent à C.



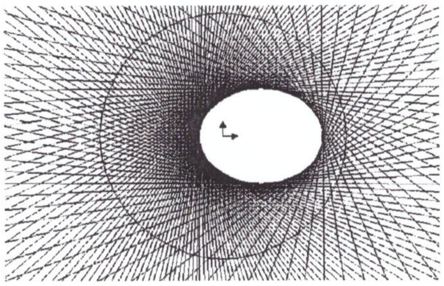
remarque : la médiatrice de [FF'] étant un axe de symétrie de l'ellipse, on a une définition analogue avec le cercle directeur C' relatif à F'.

∗ Construction "mécanique" (dite "du jardinier")

Il suffit de planter deux piquets (F et F') reliés par une ficelle de longueur 2a. Un crayon tendant la ficelle et glissant librement sur celle-ci dessine l'ellipse. Cette technique est utilisée par les jardiniers pour dessiner leurs massifs de fleurs.

∗ Amusant petit pliage

Sur une feuille circulaire, placer un point F, pas au centre. En repliant un grand nombre de fois la feuille de telle sorte que le bord de la partie repliée passe par F, les plis dessinent une ellipse.



(enveloppe tangentielle de l'ellipse)

∗ Equation réduite de l'ellipse (rapportée à son centre)

On rapporte le plan au repère orthonormé

$$(O;\vec{i},\vec{j}) \text{ avec } \vec{i}=\frac{1}{\|\overrightarrow{FF'}\|}\overrightarrow{F'F}$$

On a : $MF^2=(x-c)^2+y^2$ et $MF'^2=(x+c)^2+y^2$.
Ainsi $MF'^2-MF^2=(MF'-MF)(MF'+MF)=4cx$. On a donc simultanément : $MF'+MF=2a$ et $MF'-MF=(2cx)/a$. Donc $MF'=a+(cx)/a$ et $MF=a-(cx)/a$.
D'où : $MF^2=(x-c)^2+y^2=(a-(cx)/a)^2$. On obtient finalement :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

La réciproque est laissée au lecteur.

∗ Définitions (a>b)

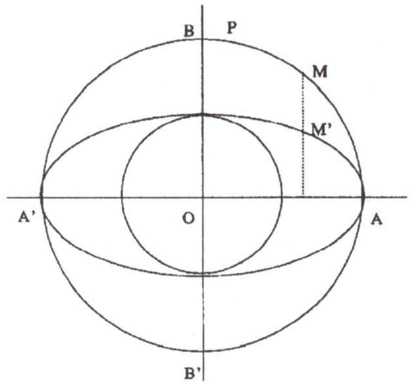
Le cercle de centre O et de rayon a s'appelle le cercle principal de l'ellipse.

Le cercle de centre O et de rayon b s'appelle le cercle secondaire de l'ellipse.

∗ Théorème

L'ellipse se déduit de son cercle principal (resp. secondaire) par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) (resp. (Oy)) et de rapport b/a (resp. a/b).

dém. (pour le cercle principal)



$$P: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad a\left((Ox);\frac{b}{a}\right): \begin{cases} x'=x \\ y'=\frac{b}{a}y \end{cases}$$

donc $a(P): \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$

∗ Conséquence

Une affinité orthogonale de rapport k multipliant les aires par $|k|$, l'aire de l'ellipse est égale à :

$$(\pi a^2)\times\frac{b}{a} = \boxed{\pi ab}$$

∗ Représentation paramétrique de l'ellipse

Le cercle principal admettant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$$

l'ellipse, image de celui-ci par l'affinité orthogonale d'axe (Ox) et de rapport b/a, est paramétrée par :

$$\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}}$$

∗ Définition monofocale de l'ellipse (par foyer et directrice)

(le cercle échappe à cette définition)

Théorème

L'ellipse de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M du plan tels que :

$\boxed{e=\frac{MF}{MH}=\frac{c}{a}}$ avec $e\in]0,1[$, H étant le projeté orthogonal de M sur D.

Une ellipse est une conique d'excentricité inférieure à 1.

dém. En prenant M=A, on obtient une équation de D. D: $x=a^2/c$. (ou $x=a/e$). La traduction analytique de $MF^2=e^2MH^2$ étant :

$$(x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)^2$$

on parvient à :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

∗ <u>Tangentes à l'ellipse</u>

<u>Equation de la tangente</u>

$$E:\begin{cases} x(t)= a\cos t \\ y(t)= b\sin t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t_0)=-a\sin t_0 \\ y'(t_0)=b\cos t_0 \end{cases} \qquad (T): \begin{vmatrix} x-x_0 & -a\sin t_0 \\ y-y_0 & b\cos t_0 \end{vmatrix}=0$$

En utilisant le fait que $\cos t_0 = x_0/a$ et $\sin t_0 = y_0/b$ on obtient :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

On reconnait la règle du dédoublement des termes.

<u>Théorème</u>

La tangente est bissectrice des rayons-vecteurs.
(c'est à dire bissectice extérieure de FMF')

dém.

On rappelle que si $\vec{u}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$, alors $\frac{d\vec{u}}{dt}=x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}$

On montre aisément en repassant par les coordonnées que :

$$\frac{d(\vec{u}.\vec{v})}{dt}=\vec{u}.\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}.\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$FM+F'M=2a \Leftrightarrow \sqrt{\overrightarrow{FM}^2}+\sqrt{\overrightarrow{F'M}^2}=2a \Rightarrow \frac{2\overrightarrow{FM}.\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}}{2FM}+\frac{2\overrightarrow{F'M}.\frac{d\overrightarrow{F'M}}{dt}}{2F'M}=0$$

Or $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF}$. Donc $\frac{d\overrightarrow{FM}}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. Ainsi $\frac{\overrightarrow{FM}}{FM}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}+\frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=0$

mais $\vec{u}=\frac{\overrightarrow{FM}}{FM}$ et $\vec{v}=\frac{\overrightarrow{F'M}}{F'M}$ sont des vecteurs unitaires des rayons-vecteurs

comme $(\vec{u}+\vec{v}).\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=0$, que $\vec{u}+\vec{v}$ dirige la bissectrice de $\widehat{FMF'}$

et que $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ dirige (T), on a le resultat.

Théorème

Le symétrique N du foyer F par rapport à la tangente appartient au cercle directeur relatif au foyer F'.

dém. Comme NMF est isocèle, la bissectrice de FMN est aussi la médiatrice de [FN].

Théorème

Le projeté orthogonal K d'un foyer sur une tangente est un point du cercle principal.

dém. Soit h l'homothétie de centre F et de rapport 1/2. h(N)=K et h(F')=O. h transforme donc le cercle directeur relatif à F' (rayon 2a) en le cercle principal (rayon a). Donc K est un point de P.

Théorème

La portion de tangente comprise entre l'ellipse et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

Il suffit de vérifier analytiquement que $\overrightarrow{M_0F}.\overrightarrow{FT}=0$

HYPERBOLE

* Définition bifocale (conique propre à centre)

Soient F et F' deux points distincts, FF'=2c, et a tel que 0<a<c. On appelle hyperbole de foyers F et F' l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\boxed{|MF-MF'|=2a}$$

O est le centre de l'hyperbole, (FF') l'axe focal, FF'=2c la distance focale, la médiatrice de [FF'] est l'axe non focal ou transverse, A et A' sont les sommets (AA'=2a), B et B' sont les branches, définies par :

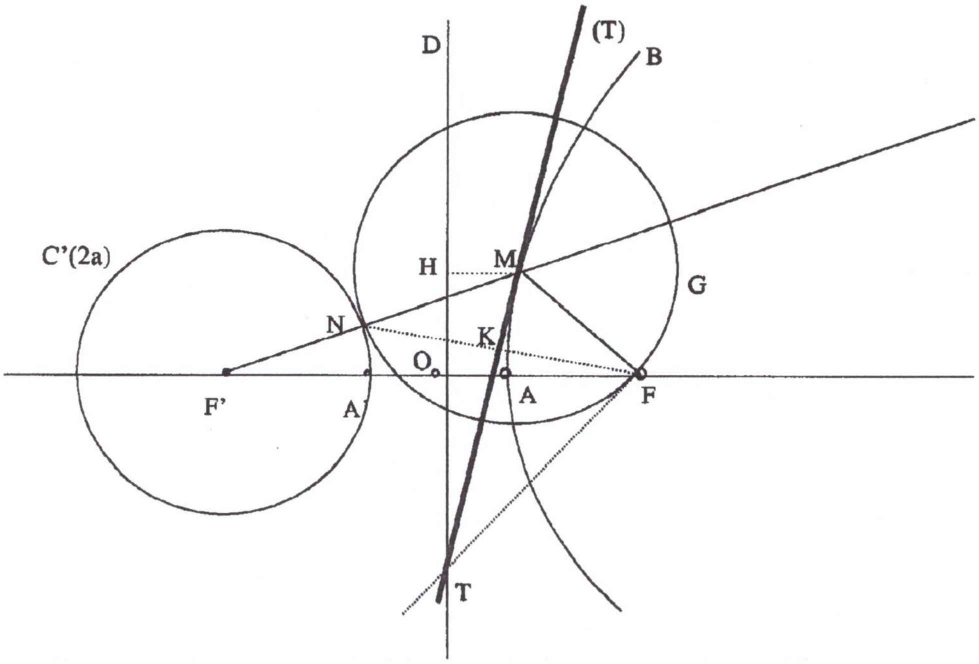
$M\in B \Leftrightarrow MF'-MF=2a$, $M\in B' \Leftrightarrow MF-MF'=2a$. Enfin, $\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{MF'}$ sont les rayons-vecteurs.

* Construction point par point

Théorème

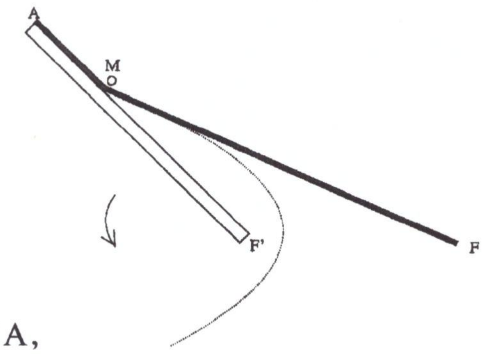
L'hyperbole de foyers F et F', FF'=2c, de sommets A et A', AA'=2a, 0<a<c, est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents extérieurement à C', cercle de centre F' et de rayon 2a.
(C' est le cercle directeur de l'hyperbole relatif à F'.)

dém. (voir figure page suivante)
Soit M un point de l'hyperbole : |MF'-MF|=2a. Soit G le cercle de centre M et de rayon MF. Soit N un des deux points de G situé sur (MF'). F'N=|F'M-MN|=|F'M-MF|=2a. G est donc tangent à C'.
Suivant que N est situé ou non sur [MF'], C' est extérieur ou intérieur à G. La branche B est obtenue pour C' extérieur à G et la branche B' pour C' intérieur à G.
La réciproque est lâchement abandonnée au lecteur.



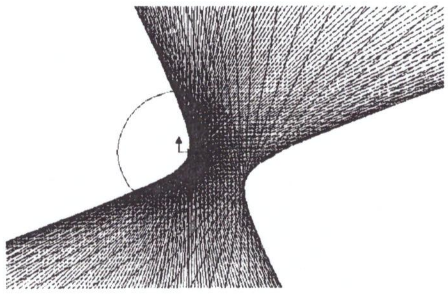
remarque : la médiatrice de [FF'] étant un axe de symétrie de l'hyperbole, on a une définition analogue avec le cercle directeur C relatif à F.

* <u>Construction "mécanique"</u>



Une règle pivote autour de F'.
Une ficelle de longueur l=AM+MF est fixée en A et F. Un crayon tendant la ficelle en M dessine une branche de l'hyperbole en glissant sur la règle. En effet : F'A<l=AM+MF<F'A+F'F.
On pose l-F'A=2a.
Ainsi AM+MF=F'A+2a et AM+MF'=F'A, si bien que MF-MF'=2a.

* <u>Amusant petit pliage</u>



On dessine un cercle sur une feuille A4. A l'extérieur de ce cercle, on place un point F et on fait en F un petit trou pour pouvoir voir à travers (c'est du joli ...)
On replie ensuite de nombreuses fois les coins de la feuille de telle sorte qu'à travers le trou on puisse voir le cercle. Les plis dessinent une branche d'hyperbole.
(enveloppe tangentielle de l'hyperbole)

∗ <u>Equation réduite de l'hyperbole</u> (rapportée à son centre)

On rapporte le plan au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\vec{i}=\frac{1}{\|\overrightarrow{F'F}\|}\overrightarrow{F'F}$

$MF^2=(x-c)^2+y^2$ et $MF'^2=(x+c)^2+y^2$.

Donc $MF'^2-MF^2=(MF'-MF)(MF'+MF)=4cx$

On a donc : $\begin{cases} |MF'-MF|=2a \\ MF'+MF=\pm\dfrac{2cx}{a} \end{cases}$

Ainsi : $MF'^2=\left(\dfrac{cx}{a}+a\right)^2$ et $MF^2=\left(\dfrac{cx}{a}-a\right)^2$

En identifiant, il vient :

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ avec $\boxed{a^2=c^2-b^2}$

La réciproque est lancée en pâture au lecteur.

∗ <u>Représentations paramétriques de l'hyperbole</u>

Le lecteur est invité à vérifier que les trois paramétrisations suivantes conviennent :

$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\varphi} \\ y=b\operatorname{tg}\varphi \end{cases}}$ $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right[$ (les 2 branches)

(en effet : $\dfrac{x^2}{a^2}=1+\dfrac{y^2}{b^2}$, poser $\dfrac{y}{b}=\operatorname{tg}\varphi$)

$\boxed{\begin{cases} x=a\dfrac{1+t^2}{1-t^2} \\ y=b\dfrac{2t}{1-t^2} \end{cases}}$ (poser $t=\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$)

$\boxed{\begin{cases} x = a\operatorname{ch} t \\ y = b\operatorname{sh} t \end{cases}}$

Cette dernière est la plus remarquable (comparer avec l'ellipse). Elle justifie en effet les dénominations des fonctions cosinus *hyperbolique* et sinus *hyperbolique*.

* Définition monofocale de l'hyperbole (par foyer et directrice)

Théorème

L'hyperbole de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\boxed{e=\frac{MF}{MH}=\frac{c}{a} \quad \text{avec } e>1}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur D.
Une hyperbole est une conique d'excentricité supérieure à 1.

La démonstration se fait analytiquement comme dans le cas de l'ellipse. On montre qu'une équation de D est aussi $x=a^2/c$.

* Définition

Le cercle de centre O et de rayon a est appelé <u>cercle principal</u> de l'hyperbole.

* Tangentes à l'hyperbole

Equation de la tangente

$$H:\begin{cases} x(t)=\dfrac{a}{\cos t} \\ y(t)=b\operatorname{tg} t \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t)=\dfrac{a\sin t}{\cos^2 t} \\ y'(t)=\dfrac{b}{\cos^2 t} \end{cases} \quad \text{donc (T) est dirigee par } \begin{pmatrix} a\sin t \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{donc (T)}: \begin{vmatrix} x-x_0 & a\sin t_0 \\ y-y_0 & b \end{vmatrix}=0$$

En utilisant le fait que $x_0=a/\cos t_0$ et $y_0= b\operatorname{tg} t_0$, on parvient à :

$$\boxed{\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

On reconnait encore une fois la règle du *dédoublement des termes.*

Théorème

La tangente est bissectrice des rayons-vecteurs.
(i.e. bissectrice de FMF')

La démonstration se fait comme dans le cas de l'ellipse.

Théorème

Le symétrique du foyer F par rapport à la tangente est un point du cercle directeur relatif à F'.

dém. NMF étant isocèle, la bissectrice de FMN est médiatrice de [FN].

Théorème

Le projeté orthogonal d'un foyer sur une tangente à une hyperbole est un point du cercle principal.

La démonstration se fait comme pour l'ellipse.

Théorème

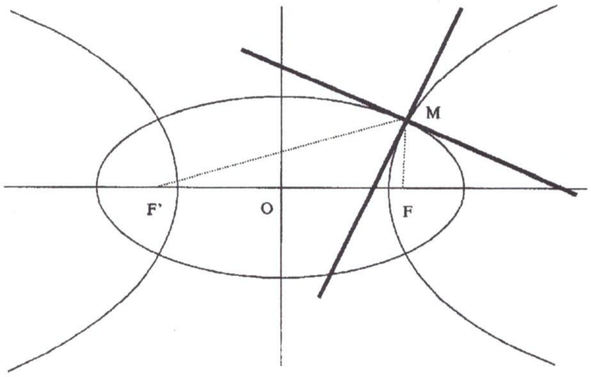
La portion de tangente comprise entre l'hyperbole et une directrice est vue du foyer associé sous un angle droit.

Démonstration analytique, comme pour l'ellipse.

Théorème

Une ellipse et une hyperbole homofocales (c'est à dire admettant les mêmes foyers) ont leurs tangentes perpendiculaires en leurs points d'intersection .

dém. réfléchir environ 15 secondes.



* Asymptotes de l'hyperbole

Théorème

L'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ***admet deux asymptotes d'équations:***

$\boxed{y=\pm\frac{b}{a}x}$ ***dont la réunion a pour équation*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

(équation homogène associée à celle de l'hyperbole)

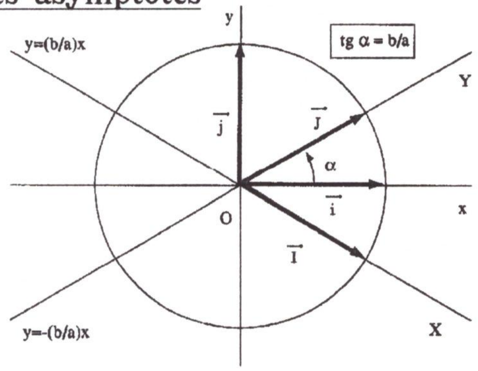
dém. On se borne à $x \geq a$, $y \geq 0$, le reste se déduisant par symétrie. On passe alors en fonctionnel sur la demi-branche d'équation $y=f(x)$ et l'on mène la preuve d'asymptote comme à l'ordinaire.

remarque 1 : on peut enfin interpréter géométriquement le nombre b. C'est la longueur AS où S est le point d'intersection de la tangente au sommet A et de l'asymptote.

remarque 2 : Si b=a, les asymptotes sont perpendiculaires. L'hyperbole est alors dite équilatère.
Dans ce cas :

$\boxed{e=\sqrt{2}}$

Equation de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes



Th. $\boxed{\text{C'est : } XY=\dfrac{c^2}{4}}$

dem. Dans $(O;\vec{i},\vec{j})$ H: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$\vec{I}=\vec{i}\cos\alpha-\vec{j}\sin\alpha$, $\vec{J}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha$
sont des vecteurs directeurs unitaires des asymptotes.

$M(x,y)$ dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, $M(X,Y)$ dans $(O;\vec{I},\vec{J})$

$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=X\vec{I}+Y\vec{J}=X(\vec{i}\cos\alpha-\vec{j}\sin\alpha)+Y(\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\sin\alpha)$

donc : $\begin{cases} x=(Y+X)\cos\alpha \\ y=(Y-X)\sin\alpha \end{cases}$

En utilisant $\cos\alpha=a/c$ et $\sin\alpha=b/c$ (car $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$), on a le résultat.

remarque : on vient donc de montrer que les fonctions homographiques connues depuis la classe de seconde admettent bien pour courbes représentatives des hyperboles au sens des définitions données en terminale.

Théorème ***Le point de contact d'une tangente à l'hyperbole est le milieu du segment déterminé sur cette tangente par les asymptotes.***

dém. dans le repère lié aux asymptotes, H: $y=k/x$. Le lecteur est invité à terminer la démonstration à titre d'exercice.

exercice : déterminer les éléments caractéristiques (au sens des définitions de terminale) de l'hyperbole d'équation $y=1/x$.

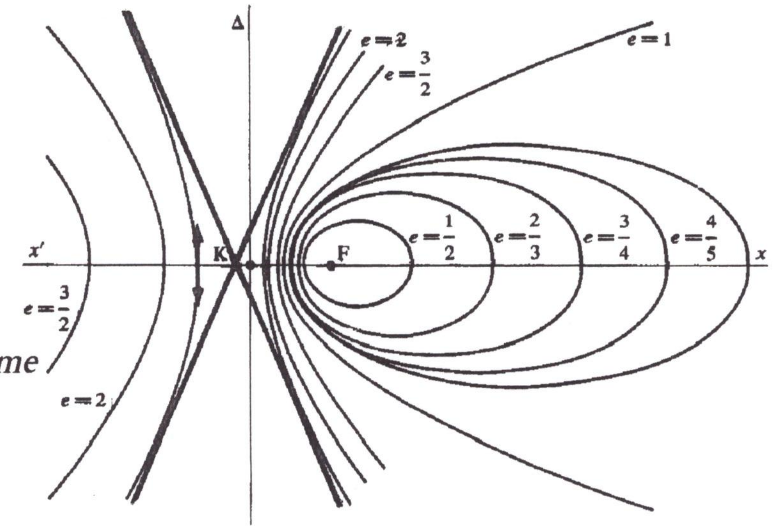
SYNTHESE

Les coniques sont les lignes de niveau de l'application :

$\boxed{M\rightarrow\dfrac{MF}{MH}=e}$

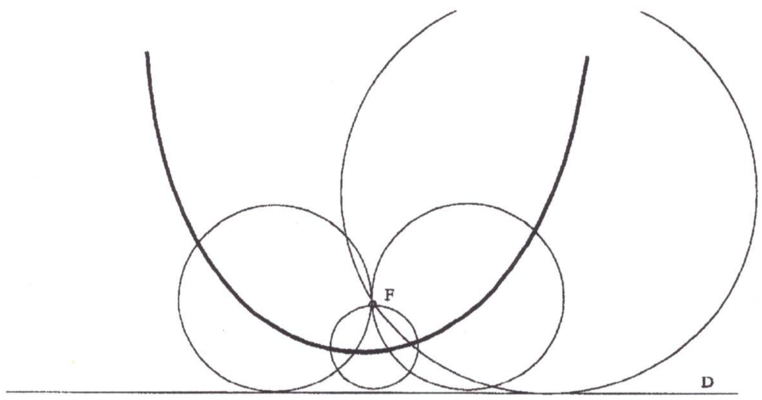
0<e<1 : ellipse
e=1 : parabole
e>1 : hyperbole

Deux coniques de même excentricité sont semblables.

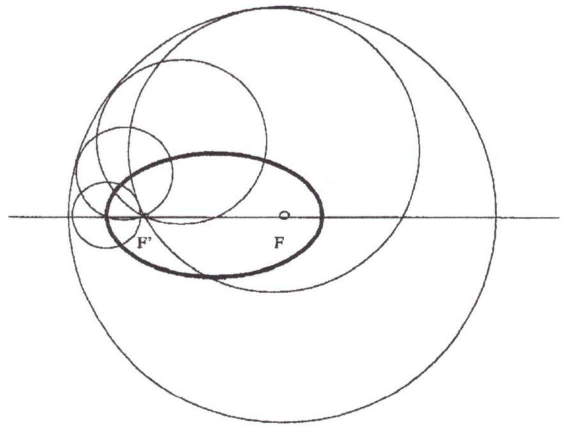


Coniques de foyer F et de directrice associée Δ

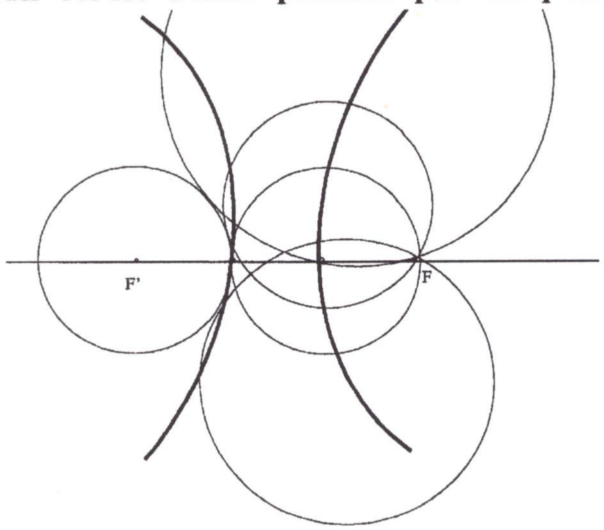
Classification par le mode de génération



PARABOLE : ensemble des centres des cercles tangents à une droite donnée passant par un point donné.

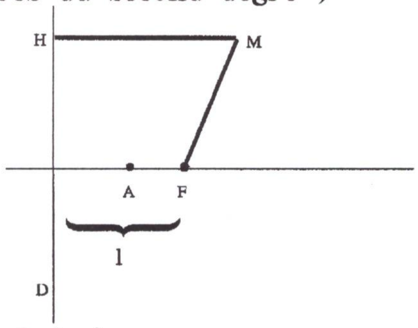


ELLIPSE : ensemble des centres des cercles tangents intérieurement à un cercle donné passant par un point donné.



HYPERBOLE : ensemble des centres des cercles tangents extérieurement à un cercle donné passant par un point donné.

Equation générale des coniques (courbes du second degré)



Dans $(F;\vec{i},\vec{j})$, en traduisant analytiquement MF/MH=e, on aboutit à :

$$\boxed{(1-e^2)x^2+y^2+2e^2lx-e^2l^2=0}$$

(l désignant la distance entre le foyer et la directrice, longueur confondue avec p dans le cas de la parabole)

On montre plus généralement que toute conique admet une équation de la forme :

$$\boxed{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0}$$

Equation polaire des coniques

Dans $(F;\vec{i},\vec{j})$, $M(r,\theta)$.

$FM=eMH \Leftrightarrow r=e|x-l| \Leftrightarrow r^2=e^2(r\cos\theta-l)^2$

$\Leftrightarrow (1-e^2\cos^2\theta)r^2+(2e^2l\cos\theta)r-e^2l^2=0$

$\Delta'=(el)^2$

$$r=\frac{\pm el}{1\pm e\cos\theta}$$

(on peut garder seulement le + car les mêmes points sont obtenus en changeant θ en $\pi-\theta$)

On pose p=el. (p est le paramètre de la conique. C'est la demi-longueur de la corde focale parallèle à la directrice.) D'où :

$$\boxed{r=\frac{p}{1+e\cos\theta}}$$

TP : CONE ET CONIQUES

On se place dans l'espace rapporté à un repère orthonormé

$(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit S le point de coordonnées (0,0,p) avec p>0. On appelle cône de sommet S et de base C, cercle de centre O et de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que M=S ou (MS) passe par un point N de C. On désignera ce cône par K.

1°) Donner une représentation paramétrique de K en choisissant comme paramètres :

$t=(\vec{i},\overrightarrow{ON})$ ($t\in[0;2\pi[$) et $k\in\mathbb{R}$ tel que $\overline{SM}=k\overline{SN}$.

2°) Soient x=f(t,k), y=g(t,k), z=h(t,k) les équations obtenues. Quelle est la nature de la courbe définie par :

$$\begin{cases} x=f(t,k_0) \\ y=g(t,k_0) \quad \text{avec } t\in[0;2\pi[\text{ et } k_0\in\mathbb{R} \ ? \\ z=h(t,k_0) \end{cases}$$

3°) Même question en fixant t et en laissant varier le réel k.

4°) Donner une équation cartésienne de K.

5°) A quelles conditions l'équation ax+by+cz+d=0 est-elle l'équation d'un plan P contenant la droite (Ox) ?
Dans la suite, on supposera $b^2+c^2=1$. (normalisation)

6°) Soit P un plan contenant (Ox)

et $\vec{I}$ un vecteur unitaire de P tel que $\vec{i}.\vec{I}=0$.

Trouver, dans $(O;\vec{i},\vec{I})$,
l'équation cartésienne F(X,Y)=0 de l'intersection de P et K.
(on posera X=x et Y=z/b)

7°) Conclure.

Le théorème obtenu reste vrai si le cône a une base ... conique (et non seulement circulaire) ! Ce résultat révèle que la notion de conique est une notion projective fondamentale qui se conserve dans toute perspective. Et ce n'est pas la seule ...
